3ο μάθημα

4/11/19

ΠΑΡΑΔ: Να λυθεί η Δ.Ε. $u'' - u = f(x)$

ΛΥΣΗ:

F.T.: $\mathcal{F}\{u''-u\} = \mathcal{F}\{f(x)\} = \hat{f}(k)$

$\Leftrightarrow \mathcal{F}\{u''\} - \mathcal{F}\{u\} = \hat{f}(k)$

$\Leftrightarrow \boxed{-k^2\hat{u}(k) - \hat{u}(k) = \hat{f}(k)}$ Δηλ. έκανα μια Δ.Ε. αλγεβρική !

$\Leftrightarrow -(k^2+1)\hat{u} = \hat{f}$

$\Leftrightarrow \hat{u} = -\frac{\hat{f}(k)}{k^2+1}$

$$\Rightarrow \mathcal{F}^{-1}\{\hat{u}\} = \frac{1}{2\pi}\int\left(-\frac{\hat{f}(k)}{k^2+1}\right)\cdot e^{-ikx}dx$$

$$\Rightarrow u(x) = \frac{-1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(k)\cdot\frac{1}{k^2+1}\cdot e^{-ikx}dk$$

Σκέφτομαι μιγαδική ολοκλήρωση (Cauchy !)

Έχουμε γινόμενο δύο μετασχηματισμών, αφού $\frac{1}{k^2+1} = \mathcal{F}\{\frac{1}{2}\cdot e^{-|x|}\}$

ΥΠΕΝΘ. (Θεώρ. Συνέλιξης):

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-y)f(y)\,dy\right\} = \hat{k}(k)\cdot\hat{f}(k)$$

↓ άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-y)f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{k}\cdot\hat{f}\cdot e^{-ikx}dk$$

Άρα στην περίπτωσή μας:

$$u(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)\cdot e^{-|x-y|}dy$$

Πώς θα αποδείξω ότι αυτή είναι λύση της Δ.Ε. ? → Με πράξεις (περιπτ. για το απόλυτο)

4

ΠΑΡΑΔ.: Να λυθεί η εξίσ. διάχυσης / θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t>0$$

ΛΥΣΗ:

Εφαρμόζω F.T. στην εξίσ. $\mathcal{F}\{u_t - a u_{xx}\} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}\{u\} - a\cdot\mathcal{F}\{u_{xx}\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + ak^2\hat{u} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{u}_t = -ak^2\hat{u}}$$

$$\Rightarrow \hat{u}(k,t) = C(k)\cdot e^{-ak^2 t}$$

$$\hat{u}(k,0) = C(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot e^{ikx}\,dx = \hat{f}(k)$$

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)\cdot e^{-ak^2 t}$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\cdot \underbrace{e^{-ak^2 t}}_{\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\cdot e^{-x^2/4at}\right\} = e^{-ak^2 t}} e^{-ikx}\,dk$$

$$\underset{\text{Συνελ.}}{\overset{\text{Θεώρ.}}{\Rightarrow}} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4at}}\,dy$$

ΠΑΡΑΔ.

$f(x) = e^{-|x|} \implies \hat{f}(k) = \frac{2}{k^2+1}$

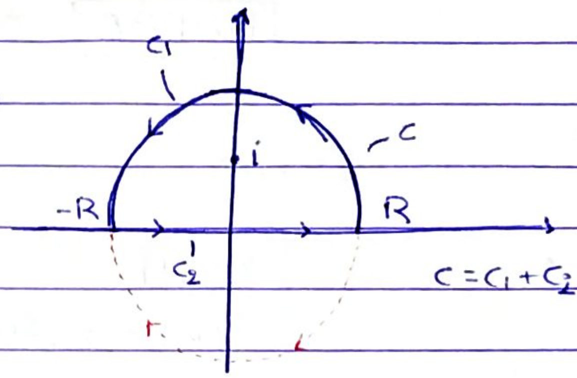
$\Longleftarrow$ Υπολογίζω τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{k^2+1} e^{-ikx}\, dk$$

Cauchy...

$$\oint_C \frac{e^{-ixz}}{z^2+1}\, dz, \quad z \in \mathbb{C}$$

Εγώ όμως θέλω από το $-\infty$ στο $+\infty$



Άρα:

$$\oint \frac{e^{-ixz}}{z^2+1}\, dz = \int_{C_1} \frac{e^{-ixz}}{z^2+1}\, dz + \int_{C_2} \frac{e^{-ixz}}{z^2+1}\, dz$$

$$\int_{C_2} \frac{e^{-ixz}}{z^2+1}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ixk}}{k^2+1}\, dk$$

$z \in \mathbb{R} = k$

Μηδενική επί φραγμ. $(R \to \infty)$

$$\int_{C_1} \frac{e^{-ixz}}{z^2+1}\, dz = \int_0^{\pi} \frac{e^{-ixRe^{i\theta}}}{R^2 e^{2i\theta}+1} \underbrace{Rie^{i\theta}\, d\theta}_{dz = d(Re^{i\theta})} = 0$$

$-ie^{i\theta} = -i(\cos\theta + i\sin\theta)$

C_1: ημικύκλιο

$z = Re^{i\theta}$

$0 \leq \theta \leq \pi$

Άλλα: σύμφωνα με τον Cauchy έχουμε ότι:

$$\oint f(z)\, dz = 2\pi i \lim_{z \to i} (z-i) f(z) =$$

$\rightarrow$

$$= 2\pi i \cdot \lim_{z \to i} \cancel{(z-i)} \cdot \frac{e^{-ixz}}{\cancel{(z-i)}(z+i)}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{e^{x}}{2i}$$

Αντίστοιχα κ. για τα αρνητικά ...
Έτσι προκύπτει το απόλυτο.

ΠΑΡΑΔ. Να βρεθεί ο F.T. της

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 1/2, & |x| = a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

ΛΥΣΗ:

$$\hat{f}(k) = 2 \cdot \frac{\sin(ak)}{k}, \quad k \neq 0$$

(Προφανές)

ΠΑΡΑΔ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin k \cdot \cos(kx)}{k} dk \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

ΛΥΣΗ:

ΥΠΕΝΘ. (Θεώρ. Parseval):

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot g(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k) dk}$$

Άρα θα κάνω τις πράξεις κ. θα "πάω" από το ένα ολοκλ. στο άλλο

$\boxed{\text{ΠΑΡΑΔ.}}$: Να λυθεί το Π.Σ.Τ.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u = 0 \quad , \quad |x| \to \infty \quad , \quad |y| \to \infty$$

ΛΥΣΗ:

Αρχίζω με F.T. στη μεταβλητή x

$$-k^2 \hat{u} + \hat{u}_{yy} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}(k,y) = A(k) \cdot e^{ky} + B(k) \cdot e^{-ky}$$

$$= C(k) \cdot e^{-k|y|}$$

$$C(k) = \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{ikx} \, dx$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w) \cdot \frac{2y}{(x-w)^2 + y^2} \, dw$$